**Método de Ruge-Kutta**

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del [problema de valor inicial](https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_valor_inicial).

Sea

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngy ′ ( t ) = f ( t , y ( t ) ) {\displaystyle y'(t)=f(t,y(t))\,}

una ecuación diferencial ordinaria, con C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png f : Ω ⊂ R × R n → R n {\displaystyle f:\Omega \subset \mathbb {R} \times \mathbb {R} ^{n}\to \mathbb {R} ^{n}} donde C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png Ω {\displaystyle \Omega \,} es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de ƒ sea

( t 0 , y 0 ) ∈ Ω . {\displaystyle (t\_{0},y\_{0})\in \Omega .} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

Entonces el método RK (de orden *s*) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngy n + 1 = y n + h ∑ i = 1 s b i k i {\displaystyle y\_{n+1}=y\_{n}+h\,\sum \_{i=1}^{s}b\_{i}k\_{i}} ,

donde *h* es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngΔ t n {\displaystyle \Delta t\_{n}} entre los sucesivos puntos t n {\displaystyle t\_{n}} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png t n + 1 {\displaystyle t\_{n+1}}. Los coeficientes C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png k i {\displaystyle k\_{i}} son términos de aproximación intermedios, evaluados en ƒ de manera local

k i = f ( t n + h c i , y n + h ∑ j = 1 s a i j k j ) i = 1 , . . . , s . {\displaystyle k\_{i}=f\left(t\_{n}+h\,c\_{i}\,,y\_{n}+h\,\sum \_{j=1}^{s}a\_{ij}k\_{j}\right)\quad i=1,...,s.} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

con a i j , b i , c i {\displaystyle a\_{ij},b\_{i},c\_{i}} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngcoeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la [regla de cuadratura](https://es.wikipedia.org/wiki/Integraci%C3%B3n_num%C3%A9rica) utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes a i j {\displaystyle a\_{ij}} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngdel esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir, a i j = 0 {\displaystyle a\_{ij}=0} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png para j = i , . . . , s {\displaystyle j=i,...,s} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png, los esquemas son explícitos.

**Regresión lineal**

En [estadística](https://es.wikipedia.org/wiki/Estad%C3%ADstica) la **regresión lineal** o **ajuste lineal** es un [modelo matemático](https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_matem%C3%A1tico) usado para aproximar la relación de dependencia entre una [variable dependiente](https://es.wikipedia.org/wiki/Variable_dependiente) *Y*, las [variables independientes](https://es.wikipedia.org/wiki/Variable_independiente) *Xi* y un término [aleatorio](https://es.wikipedia.org/wiki/Aleatoriedad) ε. Este modelo puede ser expresado como:

Y t = β 0 + β 1 X 1 + β 2 X 2 + ⋯ + β p X p + ε {\displaystyle Y\_{t}=\beta \_{0}+\beta \_{1}X\_{1}+\beta \_{2}X\_{2}+\cdots +\beta \_{p}X\_{p}+\varepsilon } C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

donde:

Y t {\displaystyle Y\_{t}} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png: variable dependiente, explicada o regresando.

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngX 1 , X 2 , ⋯ , X p {\displaystyle X\_{1},X\_{2},\cdots ,X\_{p}} : variables explicativas, independientes o regresores.

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngβ 0 , β 1 , β 2 , ⋯ , β p {\displaystyle \beta \_{0},\beta \_{1},\beta \_{2},\cdots ,\beta \_{p}} : parámetros, miden la influencia que las variables explicativas tienen sobre el regrediendo.

donde β 0 {\displaystyle \beta \_{0}} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pnges la intersección o término "constante", las β i   ( i > 0 ) {\displaystyle \beta \_{i}\ (i>0)} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngson los parámetros respectivos a cada variable independiente, y “**p {\displaystyle p} P”** es el número de parámetros independientes a tener en cuenta en la regresión. La regresión lineal puede ser contrastada con la [regresión no lineal](https://es.wikipedia.org/wiki/Regresi%C3%B3n_no_lineal).

**Interpolación de newton**

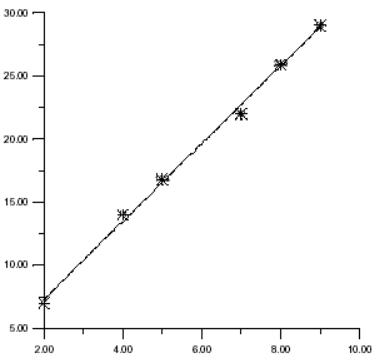
Es un método de [interpolación polinómica](https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica). Aunque sólo existe un único polinomio que interpola una serie de puntos, existen diferentes formas de calcularlo. Este método es útil para situaciones que requieran un número bajo de puntos para interpolar, ya que a medida que crece el número de puntos, también lo hace el grado del polinomio.

Existen ciertas ventajas en el uso de este polinomio respecto al [polinomio interpolador de Lagrange](https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_polin%C3%B3mica_de_Lagrange). Por ejemplo, si fuese necesario añadir algún nuevo punto o nodo a la función, tan sólo habría que calcular este último punto, dada la relación de recurrencia existente y demostrada anteriormente.

1. **Minimos cuadrados**

**Mínimos cuadrados** es una técnica de [análisis numérico](https://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_num%C3%A9rico) enmarcada dentro de la [optimización matemática](https://es.wikipedia.org/wiki/Optimizaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica), en la que, dados un conjunto de pares ordenados —variable independiente, variable dependiente— y una familia de funciones, se intenta encontrar la [función continua](https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_continua), dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de *mínimo error cuadrático*.

En su forma más simple, intenta [minimizar](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=M%C3%A1ximo_y_m%C3%ADnimo&action=edit&redlink=1) la suma de cuadrados de las diferencias *en las ordenadas* (llamadas [*residuos*](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_errores&action=edit&redlink=1)) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores en los datos. Específicamente, se llama [*mínimos cuadrados promedio*](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Filtro_de_m%C3%ADnimos_cuadrados_promedio&action=edit&redlink=1) (LMS) cuando el número de datos medidos es 1 y se usa el método de [descenso por gradiente](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Descenso_por_gradiente&action=edit&redlink=1) para minimizar el residuo cuadrado. Se puede demostrar que LMS minimiza el residuo cuadrado esperado, con el mínimo de operaciones (por iteración), pero requiere un gran número de iteraciones para converger.

**

1. Minimos cuadrados

En la ciencia y la ingeniería se da, a menudo, el caso de que un experimento produce un conjunto de datos (x1,y2), (x2,y2), ..., (xn,yn). El objetivo en esta sección es determinar una fórmula y = ƒ(x) que relacione las variables. Generalmente se dispone de un conjunto de variables previamente establecidas, y lo que hay que hallar son los valores más adecuados de unos coeficientes o de unos parámetros para estas fórmulas. Aunque existen muchas funciones que se pueden usar, suele ocurrir que existe un modelo matemático subyacente, basado en la situación física que se esté estudiando y determina la forma de la función salvo algunos coeficientes.

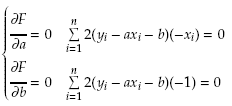
Si la relación entre xi e yi para 1 http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFi http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFn, es lineal, entonces la función que mejor se ajusta a los datos es una línea de aproximación de la forma:

y = ax + b (ver [figura 3.5)](javascript:javascript(10,470,370))

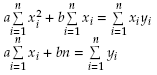
Una forma para encontrar la recta “óptima” es el método de los **mínimos cuadrados** y consiste en hallar el valor de las constantes **a** y **b** de tal manera que reduzcan al **mínimo** la suma de los cuadrados de los errores entre los valores yi dados y los valores y(xi) = axi + b en la línea de aproximación.

http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/AJUSTEDECURVASPORMINIMOSCUADRADOS2.gif**(7)  
http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/AJUSTEDECURVASPORMINIMOSCUADRADOS3.gif**

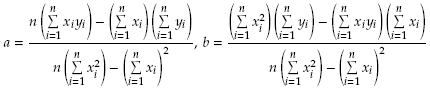
La cantidad (7) se puede considerar una función de dos “variables” **a** y **b**, a la que se le quiere hallar un mínimo. Para que ocurra un mínimo es necesario que las derivadas parciales http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/AJUSTEDECURVASPORMINIMOSCUADRADOS4.GIFsean cero. Observe que las xi e yi son puntos de datos.



Al dividir entre –2 cada una de estas ecuaciones y desarrollar las sumatorias se obtienen las llamadas ecuaciones normales

**(2)**

La solución del sistema (2), de dos ecuaciones con dos incógnitas es

**(3)**

Por lo tanto, la recta que mejor se ajusta a los datos (xi, yi), 1 http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFi http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFn relacionados en forma lineal es **y = ax + b** con a y b dados por **(3).**   
El problema de aproximar un conjunto de datos (xi, yi), 1 http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFi http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/ImagenesCapitulo3/menorigual.GIFn con un polinomio algebraico *P*m(x) de grado m < n – 1 mediante el procedimiento de mínimos cuadrados, es similar al de y = ax + b (Ver ejercicio 24 de este capítulo).  
En muchos casos los datos provenientes de pruebas experimentales no son lineales por lo que es necesario ajustarlos a una función que no sea un polinomio de primer grado. Algunas veces conviene suponer que los datos tienen una relación exponencial. Para ello, la función de aproximación debe tener la forma:

|  |  |
| --- | --- |
| y = Beax | **(4)** o bien |
| y = Bxa | **(5)** para algunas constantes a y B |

Es posible desarrollar ecuaciones normales para éstas de manera análoga al desarrollo precedente para una recta por mínimos cuadrados si las derivadas parciales se igualan a cero. Tales ecuaciones no lineales son mucho más difíciles de resolver que las ecuaciones lineales. Por esta razón el método que suele utilizarse cuando se “sospecha” que los datos tienen una relación exponencial, consiste en considerar el logaritmo de la ecuación de aproximación:

|  |  |
| --- | --- |
| y = Beax  ln y = ln(Beax)  ln y = ln B + ln eax ln y = ax + ln B (6) | y = Bxa  ln y = ln(Bxa)  ln y = ln B + ln xa ln y = aln x + ln B (7) |
| ((6) y (7) se conocen como formas linealizadas) | |

Observe que en (6) se presenta en una relación lineal entre x y ln y, por lo que se pueden usar las fórmulas dadas en (3) para resolver el problema lineal cambiando yi por ln yi y b por ln B.   
Una ventaja adicional de las formas linealizadas es que las gráficas de los datos en papel Log-Log o en papel semilogarítmico muestran a simple vista si estas formas son idóneas, en el sentido de que una recta representa los datos cuando se trazan de esa manera.

**Formula de Euler**

La fórmula de [Euler](http://sauce.pntic.mec.es/rmarti9/euler1.html), también conocida como regla de Euler o Teorema de Euler (aunque a otras fórmulas se les conoce con estos nombres) relaciona el número de caras, vértices y aristas de cualquier poliedro convexo.

establece el teorema, en el que:

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

para todo [número real](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real) *x*, que representa un ángulo en el [plano complejo](https://es.wikipedia.org/wiki/Plano_complejo). Aquí, *e* es la [base del logaritmo natural](https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_e), *i* es la [unidad imaginaria](https://es.wikipedia.org/wiki/Unidad_imaginaria), sin ⁡ x {\displaystyle \sin x} y cos ⁡ x {\displaystyle \cos x} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png son las [funciones trigonométricas](https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa) [seno](https://es.wikipedia.org/wiki/Seno_%28trigonometr%C3%ADa%29) y [coseno](https://es.wikipedia.org/wiki/Coseno).

O bien se suele expresar como:

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

siendo “z {\displaystyle z} Z” la variable compleja definida por z = x + i y {\displaystyle z=x+iy} C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngC:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

**Método de heun**

Un método para mejorar la estimación de la pendiente involucra la determinación y promediado de dos derivadas para el intervalo (una en el punto inicial y otra en el punto final).

En el método de *Euler*, la pendiente al inicio del intervalo se usa para extrapolar linealmente a yi+1.

En el método de *Heun* la pendiente calculada en la estimación previa no es para la respuesta final, sino para una predicción intermedia. Esta ecuación es llamada *predictor*. Mejora una estimación de *yi+1* que permite el cálculo de una estimación de la pendiente al final del intervalo.

y'{i + 1} = f(x\_{i + 1} ,y\_{i + 1}^0 )

Aquí, y0i+1 es el predictor, y es la misma ecuación de Euler para encontrar yi+1. Ésta nos sirve para calcular la pendiente y'i+1.

Las dos pendientes se promedian en el intervalo:

{y'} = {{y'i + y'{i + 1}\2 }

Esta pendiente promedio se utiliza para extrapolar linealmente desde yi hasta yi+1 usando el método de Euler.

y{i + 1} = yi + {{f(xi ,yi ) + f(x\_{i + 1} ,y\_{i + 1}^0 )} \ 2}h

Esta ecuación es conocida como *ecuación correctora*. El método de *Heun* es un procedimiento *predictor – corrector*.

Se puede conseguir una mejor precisión en el resultado si hacemos varios procesos correctores, esto lo logramos tomando yi+1 y reemplazándolo por y0i+1 en la ecuación y así encontrar un nuevo yi+1, y se repite el proceso hasta donde se desee.

**Mínimos cuadrados discretos**

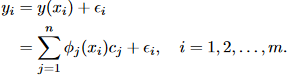
Aproximación discreta por mínimos cuadrados. En general, los problemas que aparecen en la ciencia nos enfrentan a la observación de cantidades que cambian en el tiempo y/o el espacio. Supongamos que este cambio puede ser modelado por una relación matemática y(x) =f(c1,...,cn;x) donde x es el parámetro que describe el cambio y c1,...,cn son n cantidades desconocidas, llamadas parámetros del modelo, cuyos valores queremos determinar. En

particular consideremos el caso en que el modelo es lineal en sus parámetros, esto es, la relación funcional f es lineal respecto de los parámetros c1,...,cn y por lo tanto puede expresarse como:

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

para n funciones φj(x) del parámetro x. Un conjunto de m observaciones de f

proveerá de valores medidos y i afectados de errores C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png.



Definiendo la matriz de diseño, m×n, A de elementos aij=φj(xi), el vector de parámetros, n×1, x de elementos ci, el vector de medidas, m×1, b de elementos yi, el vector de residuos, m×1, r de elementosC:\Users\Dell\Desktop\Sin título.pngi, el conjunto de ecuaciones anteriores puede escribirse matricialmente como:

Ax+r=b.

Esta relación constituye nuestro modelo lineal de las observaciones. Si m≥n (más observaciones que parámetros) se trata ahora determinar el conjunto de parámetros x que satisfaga mejor, en algún sentido, el modelo lineal. De acuerdo al método de mínimos cuadrados, los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros son aquellos valores que minimizan la norma euclideana de los residuos.

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

Este requisito conduce a que la solución de mínimos cuadrados debe satisfacer las ecuaciones normales

C:\Users\Dell\Desktop\Sin título.png

de donde se sigue que, cuando  es no-singular, la solución de mínimos cuadrados existe y es única. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución única es que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes o, dicho en forma equivalente, que el rango de la matriz A sea n. En tal caso, es fácil ver que la matriz  es simétrica y definida positiva, con lo cual un método numérico apropiado para resolver las ecuaciones normales es el método de Choleski. Sin embargo, en la práctica, muy a menudo las columnas de A son aproximadamente linealmente dependientes lo cual conduce a un sistema de ecuaciones normales con una matriz mal condicionada. Por tal motivo resulta fundamental recurrir a otra forma de resolución numérica del problema. En particular el método QR evita la formación de las ecuaciones normales y garantizan la estabilidad de la solución frente a los errores de redondeo. Este método se basa en la existencia de la factorización QR de la matriz A m×n, cuando la misma es de rango n,

A=QR,

Siendo Q es una matriz m×n cuyas columnas son una base ortonormal del espacio columna de A (con lo cual =In) y R es una matriz cuadrada de

Orden n triangular superior con elementos positivos sobre la diagonal. En tal caso las ecuaciones normales toman la forma:



Es decir,



y como R es no-singular, se obtiene . Así, conocida la factorización QR de A, la solución de mínimos cuadrados resulta, pues, por sustitución hacia atrás del sistema triangular superior



La teoría anterior puede ser aplicada en particular al caso en que la relación funcional del modelo lineal sea un polinomio de grado a lo más (n−1):



En este caso la matriz A tiene elementos aij=xj−1i. Los estimadores de mínimos cuadrados conducen así al ajuste de los datos observacionales por un polinomio de mínimos cuadradados.

**Metodo secante**

El método de la secante, es otro método para aproximar el cero de una función en el que en cada iteración se evalúa la función y no la derivada. A continuación, se presenta este método.  
Utiliza la misma fórmula del Método de Newton:

http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo5/ImagenesCapitulo5/5.2.4.GIF

pero en lugar de utilizar la derivada f ´(xn), este valor se aproxima por

http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo5/ImagenesCapitulo5/5.3.2.GIF

Al reemplazar esta aproximación de f ´(xn) en la fórmula de Newton resulta:

http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo5/ImagenesCapitulo5/5.3.3.GIF

Ya que el cálculo de xn+1 requiere conocer xn y xn-1 , se debe dar al principio dos aproximaciones iniciales x0 y x1.

La interpretación geométrica del método de la secante es similar a la del método de Newton. La recta tangente a la curva se reemplaza por una recta secante. El cero de f se aproxima por el cero de la recta secante a f. Si x0 y x1 son las aproximaciones iniciales, la aproximación x2 es la intersección de la recta que une los puntos (x0, f(x0)) y (x1,f(x1)). La aproximación x3 es la intersección de la recta que une los puntos (x1, f(x1)) y (x2, f(x2)) y así sucesivamente.